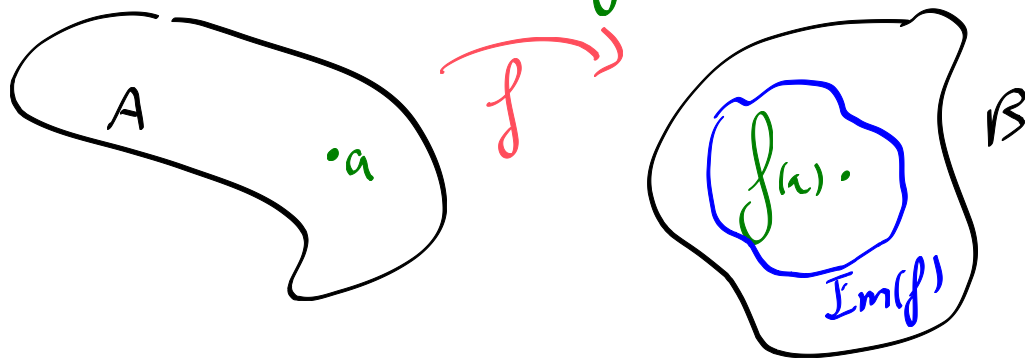


3 Fonctions Réelles

Introduction

On considère deux ensembles, A et B .
Une **fonction** f est une **association** d'un
élément $f(a) \in B$ pour chaque élément $a \in A$
'Chaque $a \in A$ est 'envoyer' sur un $b \in B$ '



On écrit $f: A \rightarrow B$ ou

L'ensemble de départ $\xrightarrow{f}$ $A \rightarrow B$ L'ensemble d'arrivée

Un préimage de $f(a)$ $\rightarrow a \mapsto f(a)$ L'image de a

• Définition

Soit $f: A \rightarrow B$.

- L'image de f est l'ensemble

$$\text{Im}(f) = \{ f(a) \mid a \in A \} \subset B$$

toutes les images de f $\nearrow$

Dans ce cours, on s'intéresse aux fonctions
où $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$: les fonctions **réelles**
(à une variable)

Par exemple, si

$$f(4) = 12$$

on a

- L'image de 4 est 12
- 4 est un préimage de 12
- $12 \in \text{Im}(f)$

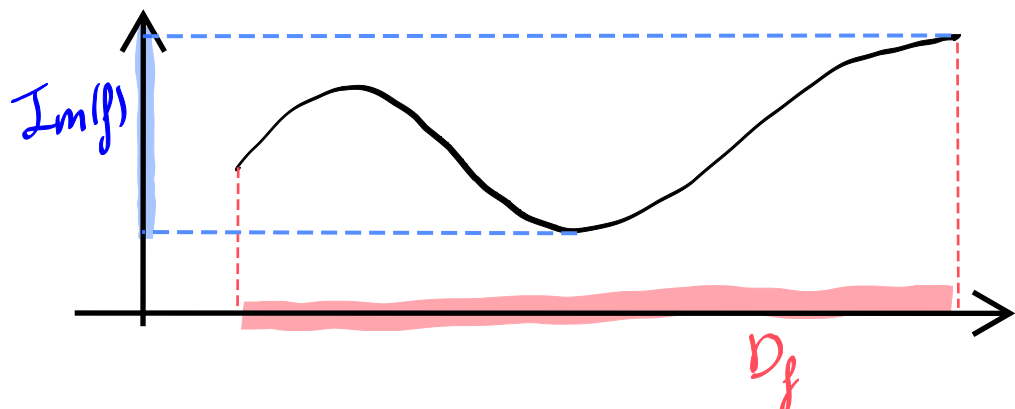
On peut expliciter une fonction réelle de 2 manières :

• algébriquement :

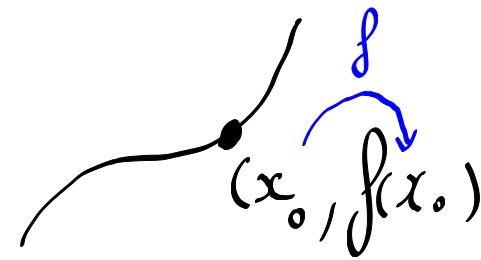
$$f(x) = x^2 ; \quad f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \geq -1 \\ -5 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Rem: Si une fonction est donnée algébriquement, son domaine de départ est généralement implicitement donné par le domaine de définition de l'expression. On note cet ensemble D_f .

• graphiquement



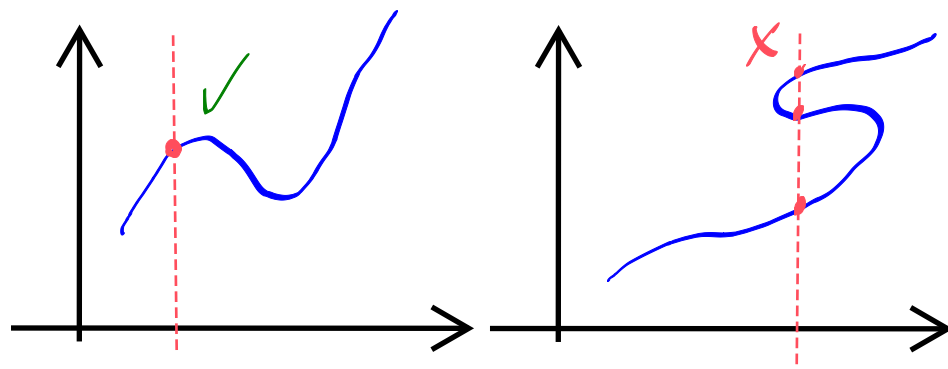
Un point est sur le graphe si (et seulement si) f envoie la 1^{re} coordonnée sur la 2^e !



$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D_f, y = f(x) \}$$

↑ le graphe

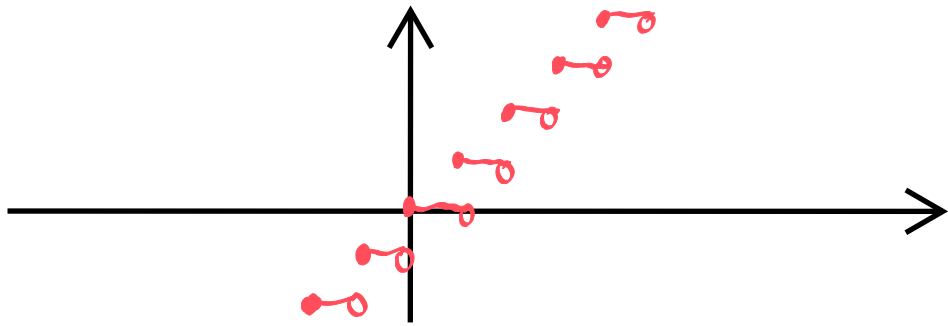
Remarque Toutes les courbes ne sont pas des graphes de fonction, le test est simple :



Exemples

- $f(x) = x^2$; $D_f = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [0; +\infty[$
- $f(x) = |x|$; $D_f = \mathbb{R}$; $\text{Im}(f) = [0; +\infty[$
- $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$; $D_f = [1; +\infty[$
 $\text{Im}(f) = [3; +\infty[$

- $E(x) = \lfloor x \rfloor$ partie entière
 $E(0; 5) = 0$; $E(-1, 2) = -1$; $E(5) = 5$



Comment trouver $\text{Im}(f)$?

On doit trouver les valeurs de $y \in \mathbb{R}$ que $f(x) = y$ a des solutions.

- $f(x) = \frac{1}{4x-6}$

$$f(x) = y; \frac{1}{4x-6} = y; 1 = y(4x-6)$$
$$4yx = 6y + 1$$

↳ 0 sols si: $y = 0$

↳ 1 sol sinon

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

- $f(x) = x^2 - 4x$

$$f(x) = y; x^2 - 4x - y = 0$$

$$\Delta = 16 + 4y; \Delta \geq 0 \text{ si } y \geq -4$$

$$\text{Im}(f) = [-4; +\infty[$$

Parité et périodicité

Définitions Soit $f(x)$ une fct. réelle

- f est **paire** si $f(-x) = f(x)$

(La réflexion dans O_y est une symétrie du graphe)

- f est **impaire** si $f(-x) = -f(x)$

(Une rotation de 180° autour de l'origine est une symétrie du graphe)

Remarque Un polynôme est pair/impair si le degré de tous ses termes sont pairs.

Ex : $3x^4 + 2$ est pair / $x^3 + 2x \rightarrow$ impair
deg 4 $\swarrow$ deg 0 / deg 3 $\searrow$ deg 1

$x^3 + x^2 \rightarrow$ ni pair, ni impair

En général, pour décider si une fct est paire ou impaire, on essaye de simplifier $f(-x)$

Ex. $f(x) = x^4 \sin(x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 \sin(-x) \\ &= -x^4 \sin(x) = -f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ impair.

Définition

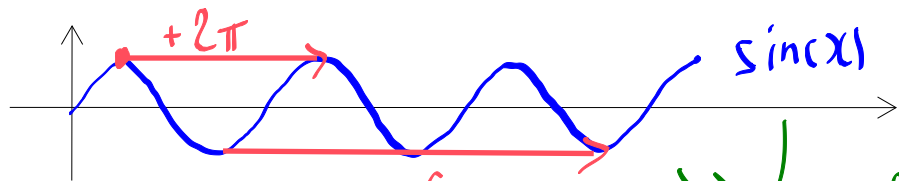
On dit qu'une fct f est **périodique** si $\exists T > 0$ tel que

$$f(x+T) = f(x) \quad (*)$$

Dans ce cas la **période** est le plus petit T tel que (*) est vraie.

Exemple 1: $f(x) = \sin(x)$

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$$



$\sin(x) = \sin(x + 4\pi)$ $\rightarrow$ La période de $\sin(x)$ est 2π

Exemple 2: $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

On cherche T tel que

$$f(x) = f(x+T)$$

$$\sin(x)\cos(x) = \sin(x+T)\cos(x+T)$$

$$\frac{1}{2}\sin(2x) = \frac{1}{2}\sin(2x+2T)$$

$$2T = 2k \cdot \pi \rightarrow T = \pi \text{ est la}$$

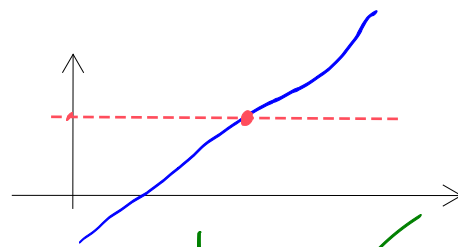
plus petite solution positive !

$\Rightarrow$ La période est π

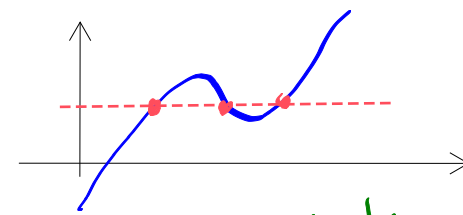
Injectivité, surjectivité, bijektivité

Définitions Soit $f: A \rightarrow B$ une fct.

- f est surjective si $\text{Im}(f) = B$
- f est injective si, $\forall a_1, a_2 \in A$, on a $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$
- f est bijective si f est surjective et injective.



injective ✓



pas injective X

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^2$$

ni inj.
ni surj.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \mapsto x^2$$

$f(2) = f(-2)$
pas inj.
surj.

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

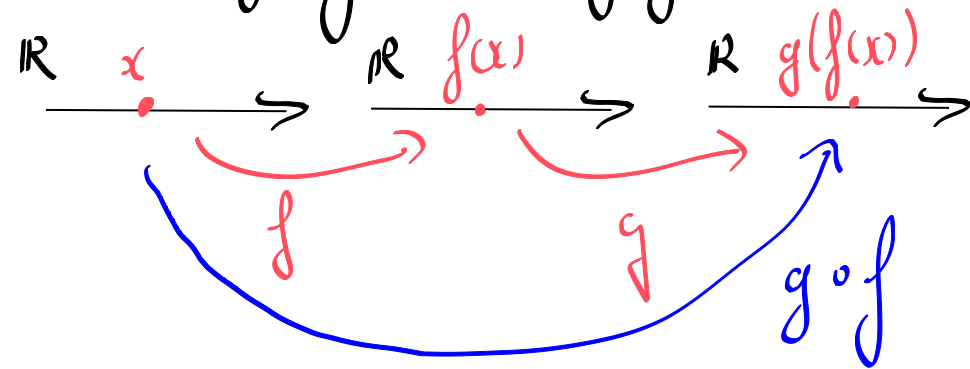
$$x \mapsto x^2$$

inj.
surj.

Composition de fonctions

Soit f et g deux fonctions réelles tel que $\text{Im}(f) \subset \text{D}_g$. Alors la composition de f et g est la fonction

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$



Par exemple. $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = 2x - 4$

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) = g(4x + 2) \\ &= 2(4x + 2) - 4 = 8x + 4 - 4 = \underline{8x} \end{aligned}$$